Практикум из Математике 2 – ЈУЛСКИ РОК – 30. 6. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме: Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Сума

Испит траје 90 минута. Сваки задатак вреди 10 бодова.

1. Дат је интеграл $\int_1^e x \ln^n x \, \mathrm{d}\, x$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(а) Израчунати I_0 и I_1.

(б) Одредити коефицијенте a_n и b_n тако да важи $I_{n+1} = a_n I_n + b_n$.

(в) Израчунати I_3.

2. Израчунати величину површине коју заклапају праве $y = 5x - 5$, $y = -5x - 5$ и полукружница $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

3. У зависности од вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ решити диференцијалну једначину $y'' + ay' = e^x$.

4. Испитати конвергенцију редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n-2}\right)$; **(в)** $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. У зависности од вредности параметра $p \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-p & p \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix}.$$

6. Дата је матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

(а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице B.

(б) Одредити B^n, $n \in \mathbb{N}_0$.

7. Дате су праве $m: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и $n: x = 3 - y = 5 - z$.

(а) Показати да се праве m и n налазе у једној равни и одредити њихов међусобни положај.

(б) Одредити једначину равни π која садржи тачку $S\,(1,0,3)$ и паралелна је равни која садржи праве m и n.

– Решења –

1. Имамо да је $I_0 = \int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}$ и

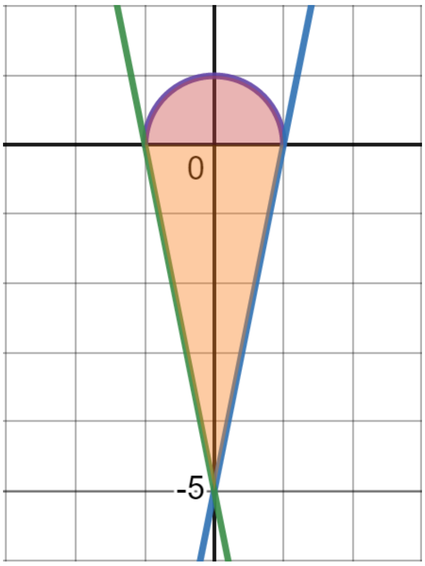
$$I_1 = \int_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Даље важи да је

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x \ln^{n+1} x \,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln^{n+1} x, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = (n+1)\frac{\ln^n x\,\mathrm{d}x}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{x^2 \ln^{n+1} x}{2}\Big|_1^e - (n+1)\int_1^e \frac{x \ln^n x}{2}\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n. \end{aligned}$$

Одакле закључујемо да је $a_n = -\frac{n+1}{2}$ и $b_n = \frac{e^2}{2}$. И на крају, применом претходне формуле добијамо $I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{2} - I_1\right) = \frac{3}{2}I_1 - \frac{e^2}{4} = \frac{3e^2+3}{8} - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2+3}{8}$.

2. Величина површине коју заклапају праве $y = 5x-5$, $y = -5x-5$ и полукружница $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$ једнака је $P = \int_{-1}^0 \left(\sqrt{1-x^2} - (-5x-5)\right)\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (5x-5)\right)\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^0 (5x+5)\mathrm{d}\,x + \int_0^1 (5-5x)\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2} + 5$.



$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,u = -\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right\} \\ &= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = -\int_{-1}^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = -I + \arcsin x\Big|_{-1}^1 \\ &= \pi - I \qquad\qquad I = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^0 (5x+5)\mathrm{d}\,x = 5\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{5}{2}$$

$$\int_0^1 (5-5x)\mathrm{d}\,x = 5\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2}$$

Други знатно једноставнији начин да се реши овај задатак јесте да се примети да се наша фигура састоји од пола круга полупречника 1 и два правоугла троугла чије су катете дужина 1 и 5. Дата величина површине једнака је $P = \frac{1}{2}1^2\pi + 2\frac{1\cdot 5}{2} = \frac{\pi}{2} + 5$.

3. Размотримо прво придружену хомогену диференцијалну једначину $y'' + ay' = 0$. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^2 + a\lambda = 0$. Њени корени су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = -a$. Уколико је $a \neq 0$ корени су различити, па је опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине $y_h = C_1 + C_2 e^{-ax}$. За $a = 0$ имамо да је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ двоструки корен карактеристичне једначине, што нам даје опште решење хомогене диференцијалне једначине $y_h = C_1 + C_2\,x$. Сада ћемо да размотримо нехомогену диференцијалну једначину $y'' + ay' = e^x$. Разматрамо под којим условима је $\mu = 1$ корен карактеристичне једначине. За $a = -1$ имамо да је $\mu = 1$ корен карактеристичне једначине и у том случају партикуларно решење нехомогене једначине тражимо у облику $y = Axe^x$. Имамо да је $y' = A(1+x)e^x$ и $y'' = A(2+x)e^x$.

Према томе, $A(2+x)e^x - A(1+x)e^x = e^x$, односно $A=1$ и $y_p = xe^x$. Ако је $a \neq -1$ партикуларно решење је облика $y_p = Be^x$. Како је $y'' = y' = Be^x$, добијамо $Be^x + aBe^x = e^x$, тј. $B = \frac{1}{1+a}$ и $y_p = \frac{e^x}{1+a}$. Закључујемо да је решење полазне диференцијалне једначине дато са

$$y = y_h + y_p = \begin{cases} C_1 + C_2\,x + e^x, & a = 0; \\ C_1 + C_2 e^x + xe^x, & a = -1; \\ C_1 + C_2 e^{-ax} + \frac{e^x}{1+a}, & a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}. \end{cases}$$

4.

(а) Како је $\cos(n\pi) = (-1)^n$, то је општи члан реда једнак $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, те је дати ред алтернирајући. Важи да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ и низ $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ је монотоно опадајући $\left(\ln n < \ln(n+1) \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)$, одакле на основу Лајбницовог критеријума следи да ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ конвергира.

(б) За општи члан ред важи $\ln\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right) = \ln\left(\dfrac{n-2+4}{n-2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{4}{n-2}\right) \sim \dfrac{4}{n-2} \sim \dfrac{4}{n}$, када $n \to +\infty$, одакле на основу другог поредбеног критеријума следи да су редови $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)$ и $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{4}{n}$ еквиконвергентни. Како ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{4}{n}$ дивергира (то је хармонијски ред), следи да дивергира и ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)$.

(в) Важи да је $\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left[\left(1 + \dfrac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}$, где је a_n општи члан реда. Имамо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Како је $\dfrac{1}{e} < 1$, на основу Кошијевог кореног критеријума следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира.

Дакле, конвергентни су редови под **(а)** и **(в)**.

5. Заменимо места првој и трећој врсти матрице A, а потом прву врсту помножену са $-p$ додајмо другој врсти и прву врсту одузмимо од треће врсте. Добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-p & p \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ p & -1 & 1 \\ 1 & 1-p & p \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1+p \\ 0 & 1-p & p+1 \\ 0 & 1 & -p-1 \end{bmatrix}.$$

Затим другу врсту одузмимо од треће врсте и другу врсту додајмо четвртој врсти. Потом заменимо места другој и трећој колони. Следи

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+p \\ 0 & 2-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+p & -1 \\ 0 & 0 & 2-p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 3$ за $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, иначе је $\operatorname{rang} A = 2$.

6. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)+12+12-3(4-\lambda)-12(1-\lambda)-4(3-\lambda) = 12-7\lambda+\lambda^2-12\lambda+7\lambda^2-\lambda^3+24-12+3\lambda-12+12\lambda-12+4\lambda = 8\lambda^2-\lambda^3 = \lambda^2(8-\lambda)$. Како минимални и карактеристични полиноми имају исте факторе, конкуренти за минимални полином матрице B су $\mu_1(\lambda)=\lambda(\lambda-8)$, $\mu_2(\lambda)=-\varphi_A(\lambda)$. По дефиницији, минимални полином матрице B је монични полином најнижег степена који матрица B анулира. Имамо да је $B(B-8\,I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{3\times 3}$, одакле закључујемо да је $\mu(\lambda)=\lambda(\lambda-8)$ минимални полином матрице B. Имамо да је $B^2 = 8B$, одакле једноставно показујемо да је $B^{n+1} = 8^n B$, $n \in \mathbb{N}$. Са друге стране, множењем једнакости $B^2 - 8B = \mathbb{O}_{3\times 3}$ са B^n, $n \in \mathbb{N}_0$ добијамо $B^{n+2} - 8B^n = \mathbb{O}_{3\times 3}$. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^2 - 8\lambda = 0$. Њени корени $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 8$ су реални и различити, па је опште решење матричне једначине дато са $B^n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_2\,8^n$. Како је $B^2 = 8B$, за $n=2$ добијамо да је $C_2 = \dfrac{1}{64}B^2 = \dfrac{1}{8}B$. Према томе, имамо да је $B^n = 8^{n-1}B$, за $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

7. Параметарски облик једначине праве m је

$$x = t+2, \quad y = -t+1, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

док је параметарски облик једначине праве n једнак

$$x = s, \quad y = -s+3, \quad z = -s+5, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(а) Из једначина правих m и n закључујемо да тачка $M\,(2,1,0)$ припада правој m и да је вектор правца праве m дат са $\overrightarrow{v_m} = (1,-1,2)$, као и да тачка $N\,(0,3,5)$ припада правој n и да је вектор правца праве n дат са $\overrightarrow{v_n} = (1,-1,-1)$. Мешовити производ вектора $\overrightarrow{v_m}$, $\overrightarrow{v_n}$ и $\overrightarrow{MN}$ је

$$\left[\overrightarrow{v_m}, \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{MN}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле закључујемо да су дати вектори компланарни, што значи да се праве m и n налазе у истој равни. Како вектори праваца ових правих нису колинеарни, следи да се дате праве секу.

(б) Означимо са α раван у којој се налазе праве m и n. Према услову задатка знамо да тачка $S\,(1,0,3)$ припада траженој равни π. Да бисмо одредили једначину равни π, потребно је да пронађемо њен вектор нормале $\overrightarrow{n_\pi}$. С обзиром на то да су равни π и α паралелне, следи да су њихови вектори нормала $\overrightarrow{n_\pi}$ и $\overrightarrow{n_\alpha}$ колинеарни. Како праве m и n леже у равни α, вектор нормале те равни је колинеаран са $\overrightarrow{v_m} \times \overrightarrow{v_n}$. Векторски производ вектора $\overrightarrow{v_m}$ и $\overrightarrow{v_n}$ је

$$\overrightarrow{v_m} \times \overrightarrow{v_n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3,3,0)\,.$$

Дакле, вектор нормале равни α је $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,0)$, одакле следи да је вектор нормале равни π једнак $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,0)$. Како тачка $S\,(1,0,3)$ припада равни π, следи да је њена једначина $\pi : x+y-1=0$.